第 10卷 第 23期 2010年 8月
1671-1815(2010)23-5695-03
科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering
Vol 10 No 23 Aug 2010

一个新 Smarandache可乘函数均值

李陆军
(西安航空职业技术学院,西安 710089)

摘 要 对任意正整数 n,可乘函数 F(n)定义为 F(1)=1,当 n>1且 n的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$时,$F(n)=\min\limits_{1\le i\le k}\left\{\frac{1}{\alpha_i+1}\right\}$。用解析方法研究了这个 Smarandache可乘函数的均值性质,并用解析方法得到了其均值的一个渐近公式。

关键词 Smarandache可乘函数 均值 渐近公式
中图法分类号 O156.4 **文献标志码** A

1 引言与结论

1.1 Smarandache可乘函数

对任意的正整数 n,Smarandache可乘函数 f(n)定义如下:

$$(m,n)=1\Rightarrow f(mn)=\max\{f(m),f(n)\},$$

如果 n的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,则有:$f(n)=\max\{f(p_1^{\alpha_1}),\cdots,f(p_r^{\alpha_r})\}$ 特别的 $f(p^{\alpha})=\max\{p\alpha\}$。

1.2 新 Smarandache可乘函数

定义 对于任意正整数 n,若它的标准分解式是 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,令 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le k}\{\alpha_i\}$,$i=1,2,\cdots,k$

$$F(n)=\min_{1\le i\le k}\left\{\frac{1}{\alpha_i+1}\right\}=\frac{1}{\lambda+1},$$ 特别的 $F(p_i^{\alpha_i})=\frac{1}{\alpha_i+1}$,$(i=1,2,\cdots,k)$,其中 F(1)=1,把 F(n)称为 n的 Smarandache可乘函数,例如:

$F(1)=1$,$F(2)=\frac{1}{2}$,$F(3)=\frac{1}{2}$,$F(4)=\frac{1}{3}$,

$F(5)=\frac{1}{2}$,$F(6)=\frac{1}{2}$,$F(7)=\frac{1}{2}$,$F(8)=\frac{1}{4}$,

$F(9)=\frac{1}{3}$,$F(10)=\frac{1}{2}$,$F(11)=\frac{1}{2}$,$F(12)=\frac{1}{3}$,

$F(13)=\frac{1}{2}$,$F(14)=\frac{1}{2}$,$F(15)=\frac{1}{2}$,$F(16)=\frac{1}{5}$,

$F(17)=\frac{1}{2}$,$F(18)=\frac{1}{3}$,…由 F(n)的定义知 F(n)是可乘函数。

有关 Smarandache可乘函数,文献[1—5]进行了研究,关于函数 F(n)的均值,至今似乎没有人进行过研究,至少我们还没有看到任何有关它的论文。现利用解析的方法研究了函数 F(n)均值的性质,并得到一个有趣的渐近公式,即以下结论。

定理 1 对于任意 x>1,有渐进公式

$$\sum_{n\le x}F(n)=\frac{1}{\lambda+1}x+O\left(x^{\frac{1}{2}}\right)。$$

其中 λ是 n的分解式中最大指数。

定理 2 对于任意 x>1,有渐进公式

$$\sum_{n\le x}\left(F(n)-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{12}{\pi^2}\sqrt{x}+O\left(x^{\frac{1}{3}}\right)。$$

2 引理

为了完成定理的证明,首先有下面几个引理。

引理 1 设 A_k表示所有素数完全 k次因子数(k≥2),有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A_k}}1=\frac{6k x^{\frac{1}{k}}}{\pi^2}\prod_p\left(1+\frac{1}{(p+1)(p^{\frac{1}{k}}-1)}\right)+O\left(x^{\frac{1}{2k}+\varepsilon}\right)。$$

2010年 5月 18日收到 国家自然科学(10682346)和陕西省自然科学基金(SJ08A28)资助
作者简介:李陆军(1955—),男,陕西西安人,1982年毕业于陕西师范大学数学系,副教授,研究方向:基础数学及数学建模。

其中 $k=2$, 或 $k=3$。

证明　为了方便起见, 定义如下特征函数

$$a(n)=\begin{cases}1, & \text{若 } n=1 \text{ 或 } n\in J_k\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

不难有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in J_k}}1=\sum_{n\leqslant x}a(n)。$$

令 $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}$。

知当 s 的实部较大时, 级数 $f(s)$ 绝对收敛。从而由 Euler 乘积公式[5]及 $a(n)$ 的定义有

$$f(s)=\prod_p\left(1+\frac{a(p^k)}{p^{ks}}+\frac{a(p^{k+1})}{(p^{k+1})^s}+\cdots\right)=$$

$$\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{ks}}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\right)=$$

$$\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{ks}}\right)\prod_p\left(1+\frac{1}{(p^{ks}+1)(p^s-1)}\right)=$$

$$\frac{\zeta(ks)}{\zeta(2ks)}\prod_p\left(1+\frac{1}{(p^{ks}+1)(p^s-1)}\right)=$$

$$\frac{\zeta(ks)}{\zeta(2ks)}R(s)。\tag{1}$$

这里 $\zeta(s)$ 是黎曼的 Zeta 函数。并用 $\prod_p$ 表示对所有素数 p 求积, 很明显的, 有不等式 $|a(n)|\leqslant n$,

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}\right|<\frac{1}{s-\frac{1}{k}}。$$

根据式(1)及著名的 Perron 公式[6], $x=$ 正整数 N 时

$$\sum_{n\leqslant x}a(n)n^{-s_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}f(s_0+s)\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x^bB(b+\sigma_0)}{T}\right)+$$

$$O\left(x^{1-\sigma_0}H(2x)\min\left(1,\frac{\lg x}{T}\right)\right)+O\left(x^{-\sigma_0}H(N)\min\left(1,\frac{x}{T\|x\|}\right)\right)。$$

这里, N 是离 x 最近的整数 (x 为半奇数时, 取 $N=x-\frac{1}{2}$), $\|x\|=|N-x|$; 在上式中取 $s_0=0$, $b=1+\frac{1}{k}$, $T=1+x^{\frac{1}{k}}$, $H(x)=x$, $B(\sigma)=\frac{1}{\sigma-\frac{1}{k}}$, 则有

$$\sum_{n\leqslant x}a(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{1+\frac{1}{k}-iT}^{1+\frac{1}{k}+iT}\frac{\zeta(ks)}{\zeta(2ks)}R(s)\frac{x^s}{s}ds+O\left(x^{\frac{1}{k}+\varepsilon}\right)。$$

为了估计其主项 $\frac{1}{2\pi i}\int_{1+\frac{1}{k}-iT}^{1+\frac{1}{k}+iT}\frac{\zeta(ks)}{\zeta(2ks)}R(s)\frac{x^s}{s}ds$, 将积分限从 $s=1+\frac{1}{k}\pm iT$ 移到 $s=\frac{1}{2k}\pm iT$。这时, 函数 $f(s)=\frac{\zeta(ks)}{\zeta(2ks)}\frac{x^s}{s}R(s)$ 有一个简单极点 $s=\frac{1}{k}$, 其留数为 $\frac{kx^{\frac{1}{k}}}{\zeta(2)}R\left(\frac{1}{k}\right)$。

即 $\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{1+\frac{1}{k}-iT}^{1+\frac{1}{k}+iT}+\int_{1+\frac{1}{k}+iT}^{\frac{1}{2k}+iT}+\int_{\frac{1}{2k}+iT}^{\frac{1}{2k}-iT}+\int_{\frac{1}{2k}-iT}^{1+\frac{1}{k}-iT}\right)\frac{\zeta(ks)}{\zeta(2ks)}R(s)\times\frac{x^s}{s}ds=\frac{kx^{\frac{1}{k}}}{\zeta(2)}R\left(\frac{1}{k}\right)$。

可以容易地得到估计

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{1+\frac{1}{k}+iT}^{\frac{1}{2k}+iT}+\int_{\frac{1}{2k}-iT}^{1+\frac{1}{k}-iT}\right)\frac{\zeta(ks)}{\zeta(2ks)}R(s)\frac{x^s}{s}ds\right|\ll$$

$$\int_{\frac{1}{2k}}^{1+\frac{1}{k}}\left|\frac{\zeta(k(\sigma-1-iT))}{\zeta(2k(\sigma-1-iT))}R(s)\frac{x^{1+\frac{1}{k}}}{T}\right|\ll\frac{x^{1+\frac{1}{k}}}{T}=x^{\frac{1}{k}},$$

再利用分部积分法便可得到如下估计

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\frac{1}{2k}+iT}^{\frac{1}{2k}-iT}\right)\frac{\zeta(ks)}{\zeta(2ks)}R(s)\frac{x^s}{s}ds\right|\ll$$

$$\int_0^T\left|\frac{\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)}{\zeta((1+2it))}\frac{x^{\frac{1}{2k}}}{t}\right|dt\ll x^{\frac{1}{2k}+\varepsilon}。$$

注意到 $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$, 由上述估计可得

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in J_k}}1=\frac{6kx^{\frac{1}{k}}}{\pi^2}\prod_p\left(1+\frac{1}{(p+1)(p^{\frac{1}{k}}-1)}\right)+O\left(x^{\frac{1}{2k}+\varepsilon}\right)$$

这样就完成了引理的证明。

3　定理的证明

对于任意的 $n\geqslant 1$, $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 为 n 的标准素因子分解式, 把区间 $(1, x]$ 的所所有正整数 n 分成如下两个部分:

A 是 $[1, x]$ 中所有平方数的整数 n 的集合; B 是 $[1, x]$ 中 $n\notin A$ 所有整数 n 组成的集合。

注意到 $F(n)\leqslant 1$, 由引理我们有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}F(n)=O\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\tag{2}$$

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}} F(n)=\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}}\frac{1}{k}=\sum_{n\le x}\frac{1}{k}-\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}\frac{1}{k}=\frac{1}{k}x+O(x^{\frac{1}{2}}) \tag{3}$$

结合式(2)和式(3)立即有

$$\sum_{n\le x} F(n)=\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}} F(n)+\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}} F(n)=\frac{1}{\lambda+1}x+O(x^{\frac{1}{2}})。$$

这就证明了定理 1。

由 $F(n)$的定义及完全平方数的整数 n的集合, 设 C表示所有完全立方数的整数 n的集合, 有

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}\left(F(n)-\frac{1}{2}\right)^2=$$

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A, F(n)=\frac{1}{3}}}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^2+\sum_{\substack{n\le x\\ n\in C}}\left(F(n)-\frac{1}{2}\right)^2=$$

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^2+\sum_{\substack{n\le x\\ n\in C}}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)^2+O\left(\sum_{\substack{n\le x\\ n\in C}}1\right)=$$

$$\frac{12}{\pi^2}\sqrt{x}+O(x^{\frac{1}{3}})。$$

这就完成了定理 2的证明。

参 考 文 献

1 Smarandache F. Only problems, not solutions. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993

2 Apostol T M. Introduction to analytical number theory. New York: Spling-verlag, 1976

3 Ivic Aleksandar. The Riemann Zeta-Function. New York: Dover Publications, 2003

4 Xu Zhefeng. On the k-full number sequences. Smarandache Notions Journal, 2004; 14: 159—163

5 Ma Jinping. The Smarandache multiplicative function. Scientia Magna, 2005; (1): 125—128

6 潘承洞, 潘承彪. 解析数的基础. 北京: 科学出版社, 1999

A Mean Value Formula of New Smarandache Multiplicative Function

LI Lu-jun

(Xi'an Aeronotical Polytechnique Institute, Xi'an 710089, P. R. China)

[Abstract] The mean value of new Smarandache multiplicative function was studied by using analysis method and an asymptotic formula of this function was given by using the analytic methods.

[Key words] smarandache multiplicative function mean value asymptotic formula